

Title	$\zeta(x)$, $\Gamma(x)$ ニ関スル函数方程式ニ就イテ
Author(s)	春木, 博
Citation	全国紙上数学談話会. 233 p.910-p.911
Issue Date	1942-03-18
oaire:version	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74959
rights	
Note	

Osaka University Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

Osaka University

1028. $\zeta(x), \Gamma(x)$ = 関スル函数方程式 = 就イテ

春 木 博 (神高商船)

リーマンノ ζ 函数ノ函数方程式トシテ有名ナル次ノ式ガアル。

$$\zeta(1-x) = 2(2\pi)^{-x} \cos \frac{\pi x}{2} \Gamma(x) \zeta(x)$$

今逆ニ $f(x)$ ガ有限平面ニ於テ $x=1$ = 於テ一位ノ極ヲモツ
外、正則ナリトスルトキ

$$(1) \quad f(1-x) = 2(2\pi)^{-x} \cos \frac{\pi x}{2} \Gamma(x) f(x)$$

ヲ充テ $f(x)$ ハ如何ナル函数カ?

$$\text{先ヅ } f(x) = \frac{C}{1-x} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n (1-x)^n \text{ トスルトキ (1) =}$$

於テ $x \rightarrow 0$ トスルコトニヨリ、容易ニ $f(0) = \frac{C}{2}$ ナルコト
ガ判ル。

又 $\varphi(x)$ ヲ $\varphi(1-x) = \varphi(x)$ ヲ充テ整函数トスルトキ
 $f(x) = \varphi(x) \zeta(x)$ ト書ケルコトモ容易ニ判ル。例ヘバ
 $\sin \pi x \zeta(x)$ ノ如キハ (1) ノ解デアアル。

シカラバ、次ニ $f(x) =$ 如何ナル條件ヲ與ヘタラ $f(x) =$
 $\zeta(x)$ トナルカ。之ハ仲々ムツカシイ問題デアアル。 Γ 函数ノ
函数方程式

$$f(x+1) = x f(x)$$

ニツイテハ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n+n)}{(n-1)! n^x} = 1 \text{ ならば } f(x) = \Gamma(x) \text{ となり, 又}$$

$f(1) = 1$, $f(x)$ が對數的凸函数ならば $f(x) = \Gamma(x)$ となる (Artin) と云フコトが知られてゐる。(1) = 對シテモコノヤウナ條件が望ましい。

又, Γ 函数ノ函数方程式

$$(2) \quad f(x)f(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}$$

ニツイテモ、上記ノヤウナ問題が考ヘラレル。 $f(x) = e^{j(-\frac{1}{2}+x)} \Gamma(x)$ 等ニ (2) ノ解デアル。更ニ又、(1) = 於テ x ノ代リ $= 1-x$ トスルコトニヨリ (2) ノ Γ 函数ノ函数方程式が得ラレルコトニ氣が付ケバ、 $f(x)$ ハ有限平面ニ於テ $x=1$ ノ一位ノ極トシテ持ッ外正則 $g(x)$ ハ $x=0$ ノ一位ノ極トシテ持ッ外正則トスルトキ、函数方程式

$$f(1-x) = 2(2\pi)^{-x} \cos \frac{\pi x}{2} g(x) f(x)$$

ヲ充ス函数 $f(x)$, $g(x)$ = 如何ナル條件ヲ映ヘレバ $\zeta(x)$, $\Gamma(x)$ トナルカ? 1 如キ一般的問題ニ生ズル。

(完)